Chuyên đề: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Chủ đề 1: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I- LÝ THUYẾT:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (*giả thiết quy nạp*)
Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Chú ý: *Trong TH phải chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì thuật toán là:*

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = p \geq 1$ (*giả thiết quy nạp*)
Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

II- BÀI TẬP MINH HỌA:

Dạng toán 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC- BẤT ĐẲNG THỨC

Bài tập 1: Chứng minh rằng với $n \in N^*$ thì $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ (1)

Bài giải:

Kiểm tra khi $n = 1$: mệnh đề (1) trở thành: $1 = 1^2 = 1$ (đúng)

Giả sử mệnh đề (1) dúng khi $n = k \geq 1$, tức là:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2 \text{ (giả thiết quy nạp)}$$

Cần chứng minh mệnh đề (1) đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh:

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + 2\left[2(k + 1) - 1\right] = (k + 1)^2$$

Thật vậy: $S_{k+1} = S_k + \left[2(k + 1) - 1\right] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

Vậy mệnh đề (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$ (2)

Bài giải:

Kiểm tra khi $n = 1$: mệnh đề (2) trở thành $2 = 2$ (đúng)

Giả sử mệnh đề (2) dúng khi $n = k \geq 1$, tức là:

$$S_k = 2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2} \text{ (giả thiết quy nạp)}$$

Cần chứng minh mệnh đề (2) đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh:

$$S_{k+1} = 2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) + \left[3(k + 1) - 1\right] = \frac{(k + 1)\left[3(k + 1) + 1\right]}{2}$$

Thật vậy: $S_{k+1} = S_k + \left[3(k + 1) - 1\right] = \dfrac{k(3k + 1)}{2} + \left[3(k + 1) - 1\right] = \dfrac{3k^2 + 7k + 4}{2}$

$$=\frac{3(k+1)\left(k+\frac{4}{3}\right)}{2}=\frac{(k+1)\left[3(k+1)+1\right]}{2}$$

Vậy mệnh đề (1) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$ thì: $3^n>3n+1$

Bài giải:

Kiểm tra với $n=2:9>7$ (đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ $(k\geq 2)$, tức là: $3^k>3k+1$

Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh bất đẳng thức:

$$3^{k+1}>3(k+1)+1$$

Thật vậy: $3^k>3k+1\Leftrightarrow 3^{k+1}>9k+3\Leftrightarrow 3^{k+1}>3k+3+6k+1-1$

$$\Leftrightarrow 3^{k+1}>3(k+1)+1+6k-1$$

Với $k\geq 2$, khi đó $6k-1>0$ nên: $3^{k+1}>3(k+1)+1$.

Vậy $3^n>3n+1$ với mọi $n\geq 2, n\in N^*$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 3$ ta có: $3^n>n^2+4n+5$

Bài giải:

Kiểm tra với $n=3:27>26$ (đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 3$, nghĩa là: $3^k>k^2+4k+5$ (giả thiết quy nạp)

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$3^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5$$

Thật vậy:

$3^k>k^2+4k+5\Leftrightarrow 3^{k+1}>3k^2+12k+15\Leftrightarrow 3^{k+1}>\left(k^2+2k+1\right)+(4k+4)+2k^2+6k+5+5$

$$\Leftrightarrow 3^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5+2k^2+6k+5$$

Với $k\geq 3$, khi đó $2k^2+6k+5$ nên: $3^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5$

Vậy: $3^n>n^2+4n+5$ với $n\geq 3$

Bài tập 5: Với giá trị nào của số nguyên dương n, ta có: $3^n>2^n+7n$

Bài giải:

d) $3^n>2^n+7n$

Ta thử với $n=1:3>2+7$ (Sai), $n=2:9>4+14$ (Sai), $n=3:27>8+21$ (Sai)

$n=4:81>16+28$ (Đúng), $n=5:243>32+35$ (Đúng)

Dự đoán: $3^n>2^n+7n\ \forall n\geq 4$. Chứng minh bằng qui nạp toán học.

Kiểm tra với $n=4:81>16+28$ (đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 4$, nghĩa là: $3^k>2^k+7k$ (giả thiết quy nạp)

Cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$3^{k+1}>2^{k+1}+7(k+1)$$

Thật vậy: $3^k>2^k+7k\Leftrightarrow 3^{k+1}>3\left(2^k+7k\right)=3.2^k+21k$ (1)

Xét $3.2^k+21k>2^{k+1}+7(k+1)\Leftrightarrow 2^k+14k-7>0\ \forall k\geq 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $3^{k+1} > 2^{k+1} + 7(k+1)$

Vậy: $3^n > 2^n + 7n \ \forall n \geq 4$

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ (1)

Bài giải:

Kiểm tra (1) với $n = 2$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ (đúng)

Giả sử (1) đúng với $n = k > 1$, tức là: $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ (giả thiết quy nạp)

Cần c/m (1) đúng với $n = k+1$, tức là cần c/m:

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$$

Thật vậy: $S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)}$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

$$= S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

$$> \frac{13}{24} + \frac{2(k+1) + 2k + 1 - 2(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$> \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > \frac{13}{24} \ (k > 1).$$

Vậy $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ đúng với mọi $n > 1$.

Dạng toán 2: **BÀI TOÁN CHIA HẾT**

Bài tập 5: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Bài giải:

Đặt $A_n = n^3 - n$

Kiểm tra với $n = 1$, $A_1 = 0 \vdots 3$ (đúng)

Giả sử mệnh đề A_n đúng khi $n = k \geq 1$, tức là: $A_k = k^3 - k \vdots 3$ (giả thiết quy nạp)

Cần chứng minh mệnh đề A_n đúng với n = k + 1, tức là cần chứng minh mệnh đề:

$$A_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) \vdots 3$$

Thật vậy: $A_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) = A_k + 3(k^2 + k) \vdots 3$$

Vậy $n^3 - n \vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Bài giải:

Đặt $A_n = n^7 - n$

B[1]: Kiểm tra với $n = 1$: $A_1 = 0 \vdots 7$ (đúng)

B[2]: Giả sử mệnh đề A_k đúng khi $n = k \geq 1$, tức là: $A_k = k^7 - k \vdots 7$ (giả thiết quy nạp)

B[3]: Cần chứng minh mệnh đề A_n đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh mệnh đề:

$$A_{k+1} = (k+1)^7 - (k+1) \vdots 7$$

Thật vậy:

$$A_{k+1} = (k+1)^7 - (k+1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 21k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$
$$= (k^7 - k) + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k) \vdots 7$$

Vậy $n^7 - n \vdots 7$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $7^n - 1$ chia hết cho 6.

Bài giải:

Đặt $A_n = 7^n - 1$

Kiểm tra với $n = 1$: $A_1 = 6 \vdots 6$ (đúng)

Giả sử mệnh đề A_k đúng khi $n = k \geq 1$, tức là: $A_k = 7^k - 1 \vdots 6$ (giả thiết quy nạp)

Cần chứng minh mệnh đề A_n đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh: $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 \vdots 6$

Thật vậy: $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + 6 \vdots 6$

Vậy $7^n - 1 \vdots 6$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài tập 5: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Bài giải:

a) $S_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} = \frac{2}{5}$, $S_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5.7} = \frac{3}{7}$, $S_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7.9} = \frac{4}{9}$.

b) Từ kết quả câu a) ta dự đoán: $S_n = \frac{n}{2n+1}$ (1) . Ta chứng minh công thức (1) bằng phương pháp quy nạp.

Kiểm tra với $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{3}$ (đúng)

Giả sử biểu thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là: $S_k = \frac{k}{2k+1}$

Cần chứng minh biểu thức (1) đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh: $S_{k+1} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$

Thật vậy: $S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]} = S_k + \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Vậy $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$.

<u>Bài tập 5:</u> Giả sử $x_1, x_2, ... x_n \in R^+$ và $x_1.x_2....x_n = 1$. Chứng minh $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$

Bài giải:

Với $n = 1: x_1 = 1$. Mệnh đề đúng .

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ $(k \geq 1)$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k \quad \vee x_1 x_2 x_3 .. x_k = 1 \quad (*)$$

Nếu với mọi $x_k = 1$ thì hiển nhiên : $x_1 + x_2 + .. + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$.

Nếu trong $k+1$ số có ít nhất một số lớn hơn 1, thì ắt phải có số nhỏ hơn 1.

Không giảm tính tổng quát , giả sử $x_k > 1$ và $x_{k+1} < 1$, khi đó ta có:

$$(1 - x_{k+1})(x_k - 1) > 0 \Leftrightarrow x_k + x_{k+1} > 1 + x_k x_{k+1} \quad (1)$$

Do đó: $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \quad (2)$

Theo giả thiết quy nạp , ta suy ra từ k số ở vế phải:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + (x_k x_{k+1}) \geq k \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} > k + 1$.

<u>Bài tập 5:</u> Chứng minh : $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ với : $a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$

Bài giải:

Với $n = 1$. Mệnh đề đúng

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ $(k \geq 1)$: $\Leftrightarrow \dfrac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k \quad (1)$

Ta phải chứng minh : $\dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}$

Thật vậy, ta nhân hai vế của (1) với $\dfrac{a+b}{2}$, ta có :

$$\Leftrightarrow \frac{a^k + b^k}{2}.\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k.\frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + a^k b + ab^k + b^{k+1}}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \quad (2)$$

Nhưng với $a > 0,\ b > 0$ thì : $(a^k - b^k)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} \geq a^k b + ab^k$

Suy ra: $$\frac{a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1}}{4}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\quad(3)$$

So sánh (2) và (3) ta được điều phải chứng minh .

Bài tập 1: Cho số thực $a>-1$. Chứng minh rằng: $(1+a)^n\ge 1+na\ \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

Bài giải:

Với $n=1:(1+a)^1\ge 1+a$ (Đúng)

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ (k\ge 1)$: $\Leftrightarrow (1+a)^k\ge 1+ka\quad(1)$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh: $(1+a)^{k+1}\ge 1+(k+1)a$

Thật vậy, ta có: $(1+a)^k\ge 1+ka\Leftrightarrow(1+a)^{k+1}\ge(1+a)(1+ka)=1+(k+1)a+ka^2\ge 1+(k+1)a$

Vậy $(1+a)^n\ge 1+na\ \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ (đ.p.c.m)

Bài tập 1: Cho n số thực $x_1,\ x_2,\ x_3,...,\ x_n\in(0;1)$. Chứng minh rằng $(\forall n\ge 2)$:

$$(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)>1-x_1-x_2-...-x_n$$

Bài giải:

Với $n=2:(1-x_1)(1-x_2)=1-x_1-x_2+x_1x_2>1-x_1-x_2$ (Đúng)

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ (k\ge 2)$: $\Leftrightarrow(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_k)>1-x_1-x_2-...-x_k\ \ (1)$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_k)(1-x_{k+1})>1-x_1-x_2-...-x_k-x_{k+1}$$

Thật vậy, ta có: $(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_k)>1-x_1-x_2-...-x_k$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_k)(1-x_{k+1})&>(1-x_1-x_2-...-x_k)(1-x_{k+1})\\&=(1-x_1-x_2-...-x_k)-x_{k+1}(1-x_1-x_2-...-x_k)\\&=1-x_1-x_2-...-x_{k+1}+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+...+x_kx_{k+1})\\&>1-x_1-x_2-...-x_{k+1}\end{aligned}$$

Vậy $(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)>1-x_1-x_2-...-x_n\quad(\forall n\ge 2)$ (đ.p.c.m)

Bài tập 1: Xác định công thức tổng quát u_n của các dãy (u_n) sau:

a) $(u_n):\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=2u_n+1\ (n\ge 1)\end{cases}$ b) $(u_n):\begin{cases}u_1=\dfrac{5}{4}\\u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}\ \ (n\ge 1)\end{cases}$

Bài giải:

a) $(u_n):\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=2u_n+1\ (n\ge 1)\end{cases}$. Ta có: $u_2=-1,\ u_3=-1,\ u_4=-1$. Dự đoán: $u_n=-1\ (\forall n\ge 1)$.

Chứng minh bằng qui nạp toán học.

Với $n=1:u_1=-1$ (Đúng)

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\ (k\ge 1)$: $u_k=-1$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh: $u_{k+1} = -1$

Thật vậy, ta có: $u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2.(-1) + 1 = -1$

Vậy $u_n = -1\ (\forall n \geq 1)$. (y.c.b.t)

b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}\ \ (n \geq 1) \end{cases}$.

Ta có: $u_2 = \dfrac{9}{8} = \dfrac{2^3+1}{2^3}$, $u_3 = \dfrac{2^4+1}{2^4}$, $u_4 = \dfrac{33}{32} = \dfrac{2^5+1}{2^5}$,.... Dự đoán: $u_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\ \ (\forall n \geq 1)$.

Chứng minh bằng qui nạp toán học.

Với $n = 1: u_1 = \dfrac{5}{4}$ (Đúng)

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k\ \ (k \geq 1)$: $u_k = \dfrac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}}$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh: $u_{k+1} = \dfrac{2^{k+2}+1}{2^{k+2}}$

Thật vậy, ta có: $u_{k+1} = \dfrac{u_k + 1}{2} = \left(\dfrac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}} + 1\right).\dfrac{1}{2} = \dfrac{2^{k+2}+1}{2^{k+2}}$

Vậy $u_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\ \ (\forall n \geq 1)$. (y.c.b.t)

Bài tập 1: Xác định công thức tổng quát u_n của các dãy (u_n) sau:

$$u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ dấu căn}}\ \ (n \geq 1)$$

Bài giải:

Ta có:

$$u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4},\ u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{8}} = 2\cos\frac{\pi}{8}.$$

Dự đoán: $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\ \ (\forall n \geq 1)$.

Chứng minh bằng qui nạp toán học.

Với $n = 1: u_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ (Đúng)

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k\ \ (k \geq 1)$: $u_k = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$

Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh: $u_{k+1} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$

Thật vậy, ta có: $u_{k+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{\text{k+1 dấu căn}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{\text{k dấu căn}}}$

$$= \sqrt{2+u_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Vậy $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ $(\forall n \geq 1)$. (y.c.b.t)

III- BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài tập 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có các đẳng thức:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}$

2) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

3) $1.2+2.5+...+n(3n-1) = n^2(n+1)$

4) $1+4+7+...+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

5) $1.4+2.7+3.10...+n(3n+1) = n(n+1)^2$

6) $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

7) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$

8) $1+3+9+...+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$

9) $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

10) $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng: Với mọi n ∈ N*:

1) $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

4) $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

5) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

6) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.\frac{3^n-1}{3^n}$

7) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$

8) $3+9+27+...+3^n = \frac{3^{n+1}-3}{2}$

9) $1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

10) $2+5+8+...+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

11) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

12) $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

Bài tập 3: Chứng minh rằng: Với mọi $n \in N^*$:

a) $2^n \geq 2n+1 \; \forall n \geq 3$

b) $2^n > n^2 \; \forall n \geq 5$

c) $n^n \geq (n+1)^{n-1} \; \forall n \geq 1$

d) $3^n > n^2+4n+5 \; \forall n \geq 3$

e) $n! > 2^{n-1} \; \forall n \geq 3$

f) $2^{n+2} > 2n+5 \; \forall n > 1$

g) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1 \; \forall n \geq 1$

h) $3^{n-1} > n(n+2) \; \forall n \geq 3$

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu ΔABC vuông tại A, có số đo các cạnh là a, b, c thì với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có bất đẳng thức : $b^n + c^n \leq a^n$.

Bài tập 5: Với giá trị nào của số nguyên dương n, ta có:

a) $2^{n+1} > n^2 + 3n$ b) $2^n > 2n + 1$

c) $2^n > n^2 + 4n + 5$ d) $3^n > 2^n + 7n$

Bài tập 6: Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Bài tập 7: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, với $n \in N^*$.

a) Tính $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 8: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 9: Cho n số thực $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n$ thỏa $-1 < a_i \le 0\ \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \ge 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Bi tập 10: Chứng minh rằng với các số thực $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), ta có:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

Bài tập 11: Chứng minh rằng $\forall n \in N^*$:

a) $n^5 - n \ \vdots\ 5$ b) $n^3 + 2n \ \vdots\ 3$ c) $n^3 + 11n \ \vdots\ 6$

d) $4^n + 15n - 1 \ \vdots\ 9$ e) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n \ \vdots\ 11$ f) $13^n - 1 \ \vdots\ 6$

g) $3^{2n-1} + 2^{n+1} \ \vdots\ 7$ h) $n^7 - n \ \vdots\ 7$ k) $3n^3 + 15 \ \vdots\ 9$

l) $11^{n+1} + 12^{2n-1} \ \vdots\ 133$ m) $2n^3 - 3n^2 + n \ \vdots\ 6$ n) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1} \ \vdots\ 9$

Bài tập 12: Với giá trị nào của số nguyên dương n, ta có:

a) $2^{n+1} > n^2 + 3n$ b) $2^n > 2n + 1$ c) $2^n > n^2 + 4n + 5$

Bài tập 13: Cmr số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh ($n \ge 4$) là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Bài tập 14: Xác định công thức tổng quát u_n của các dãy (u_n) sau:

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5\ (n \ge 1) \end{cases}$ b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}\ (n \ge 1) \end{cases}$ c) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n\ (n \ge 1) \end{cases}$

d) $(u_n): \begin{cases} u_1 = -1,\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_{n-2}\ (n \ge 3) \end{cases}$ e) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5\ (n \ge 1) \end{cases}$

Đáp số:

a) $u_n = 5n - 4$ b) $u_n = \frac{1}{n}$ c) $u_n = 5^{n-1}$ d) $u_n = 5.3^n - 6.2^n$ e) $u_n = (n+2).2^{n-1}$